

圆柱形容器内液体横向晃动的有限元法求解

耿利寅 李青

(中国科学院理化技术研究所, 北京, 100080)

摘要: 提出了用变分有限元方法计算容器内液体晃动谐振频率的方法和步骤, 这种方法可适用于各种形状复杂的容器内液体晃动问题, 其正确性已经得到验证。按照这一方法计算了卧式圆柱形容器内液体的横向晃动问题, 并对相关结果进行了总结, 得出了该类型容器内液体晃动的一般规律。

关键词: 变分有限元法 低温容器 液体晃动

1 引言

航天器发射运行过程中低温液体燃料的晃动对其运动轨迹产生影响。随着洁净低温液体燃料系统(液化天然气、氢能等)的推广, 低温液体贮运系统的应用日渐增多, 低温储槽携带低温液体时液体晃动同样对低温输运系统产生作用。上述问题归结为容器内液体的晃动对低温储存系统的动态响应, 是低温工程设计中必须考虑的重要内容。卧式圆柱形是低温运输容器常用的形式, 它在运输过程中, 各种有序或无序的外界扰动都会引发液体的晃动, 最为常见的扰动形式是横向的冲击, 从而引起低温液体的横向晃动。大振幅的液体晃动既会影响低温容器系统的动力学稳定性, 也可能引发低温系统的热声振荡, 其结果都是对系统的安全性构成威胁。

对于容器内液体的晃动问题, 国内外已经开展试验和理论研究, Moiseev 和 Petrov 应用 Ritz 法, 得出了各种类型容器内液体晃动的自然频率^[1]。Odd M. Faltinsen 用级数方法, 求得了二维矩形容器内液体晃动问题的非线性解析解^[2]。H. Norman Abramson 则用实验方法揭示了球形容器内液体晃动的重要特征^[3]; Franklin T. Dodge 对立式圆柱形容器内液体在承受横向冲击时的晃动特性进行了实验和分析研究^[4]。求解容器内液体晃动的谐振频率, 是进一步研究液体晃动问题的基础。对形状较简单的规则容器, 一般可以用解析方法求出液体晃动的自然频率, 而对于形状较为复杂的容器, 则只能采用数值计算的方法求解液体的自然晃动频率。对于液体在外界扰动下的晃动问题, 实验多采用正弦规律变化的扰动方式进行研究。

上述研究工作往往只对某种特定形状的容器进行分析和计算, 其结果仅适用于具有简单几何外形的容器, 而对于复杂或不规则几何形状的问题, 只能采取实验方法进行, 无法获得其精确解。本文提出了一种采用变分有限元方法进行数值计算, 求解液体晃动问题的方法, 原则上可以适用于任意复杂形状的容器。

2 基本方程

微分方程的解可以通过求泛函的极值来获得。根据 Hamilton 原理, 动力系统在运动过程中, 设 T 是体系的动能, U 是体系的势能, $L = T - U$ 是体系的 Lagrange 函数, 则从时刻 t_0 到时刻 t_1 , 系统的真实运动使积分 $J = \int_0^t L dt$ 取最小值。这一原理, 可以用于液体晃动问题的求解^[5]。

$$\text{液体晃动问题的 Lagrange 函数为: } J = \int_0^t (J_1 - J_2) dt \quad (1)$$

$$\text{其中, } J_1 = \frac{1}{2} \int_{S_1} (-\rho g - \bar{N} \zeta) dS \quad (2)$$

为液体自由表面的势能。忽略液体的表面张力。

$$J_2 = - \int_{S_1} \rho \zeta \frac{\partial \zeta}{\partial t} dS - \frac{1}{2} \int_V (\dot{\gamma} - \dot{A})^2 dV \quad (3)$$

为液体的动能。

$$\text{该问题的边界条件为, 在自由表面 } S_1 \text{ 上, 有 } \dot{\gamma} - \dot{A} - \bar{N} = \frac{\partial \zeta}{\partial t} \quad (4)$$

$$\text{在固定边界 } S_2 \text{ 上, 有 } \dot{\gamma} - \dot{A} - \bar{N}_0 = 0 \quad (5)$$

在上述公式中, ζ — 液体的速度势函数; ζ — 自由表面在 Y 轴方向上的位移; ρ — 液体密度; g — 重力加速度, 垂直向下; $\bar{N}$ 、 $\bar{N}_0$ — 分别为液体自由表面和固定界面法线方向的单位向量。

将上述公式离散化, 令 $c_1, \dots, c_{n_1}$ 为液体自由表面上各节点在竖直方向上的位移值, $b_0, b_1, \dots, b_{n_2}$ 为各节点的速度势。则上述的(2)、(3)式分别可以写为下面的形式:

$$J_1 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n_1} c_i^T X_i c_i \quad (6)$$

$$J_2 = - \sum_{i=1}^{n_1} b_i^T A_{1i} c_i - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n_2} b_i^T B_i b_i - \dot{b}_0^T \sum_{i=1}^{n_1} A_5^T c_i \quad (7)$$

其中下标 i 表示矩阵或向量的第 i 个元素。可以将上述公式写为矩阵形式。

$$J_1 = \frac{1}{2} C^T X C \quad (8)$$

$$J_2 = - \dot{b}^T A_1 C - \frac{1}{2} \dot{b}^T B \dot{b} - \dot{b}_0 A_5^T C \quad (9)$$

上述矩阵中, X, B, A_1 分别为 $n_1 \times n_1, n_2 \times n_2, n_2 \times n_1$ 阶; A_5 为 $n_1 \times 1$ 阶列向量。

泛函 J_1 对于 c, b , 和 b_0 的变分为

$$\begin{aligned} \delta J &= \int_0^t (\delta J_1 - \delta J_2) dt \\ &= \int_0^t [C^T X \delta C + \dot{b}^T A_1 \delta C + \delta \dot{b}^T A_1 C + \dot{b}^T B \delta \dot{b} + A_5^T C \delta b_0 + \dot{b}_0 A_5^T \delta C] dt \\ &= \int_0^t [(C^T X + \dot{b}^T A_1 + \dot{b}_0 A_5^T I) \delta C + \delta \dot{b}^T (B \dot{b} - A_1 C) - A_5^T C \delta b_0] dt \end{aligned}$$

$$\text{要使上式为 0, 必须 } A_5^T C = 0 \quad (10)$$

$$X C + A_1 \dot{b} + A_5 \dot{b}_0 = 0 \quad (11)$$

$$Bb = A_1\ddot{C}$$

(12)

由(12)式可得, $b = B^{-1}A_1\ddot{C}$, 代入(11)式, 得 $XC + A_1^TB^{-1}\ddot{C} + A_5\dot{b}_0 = 0$

(13)

令 $b_0 = b_0 e^{i\omega t}$, $c = c_p e^{i\omega t}$, 其中 b_0, c_p 分别为 b, c 的振幅, ω 为液体的自然晃动频率。

上式代入(11)式得
$$\left\{ -\omega^2 \begin{bmatrix} A_1^TB^{-1}A_1 & A_5 \\ A_5^T & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} X & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right\} \begin{bmatrix} c_p \\ b_0 \end{bmatrix}$$

(14)

即为液体晃动的特征值方程。

3 卧式容器问题计算

应用上述方法, 对矩形容器内液体的自然晃动频率进行了计算, 其频率和液面的晃动形态与应用理论方法获得的结果能够很好的符合, 详细数据已在文献^[6]中给出, 此处不再重复。通过对矩形容器的计算, 验证了上述变分有限元方法的正确性, 由此, 可对其他形状的容器内液体晃动问题进行计算。

卧式圆柱形是低温运输容器常用的形式, 它在运输过程中, 各种有序或无序的外界扰动都会引发液体的晃动, 最为常见的扰动形式是横向的冲击, 从而引起低温液体在如图 1 所示的横截面上产生晃动。这一问题可简化为如图 1 所示的二维情形。我们采用上述有限元方法, 对这一类型的问题进行了计算。计算中选择的液体种类为液氧, 圆柱形容器的内半径为 R , 液面至圆柱形横截面圆心的距离为 h , 液面位于圆心上方时为正值, 反之为零。

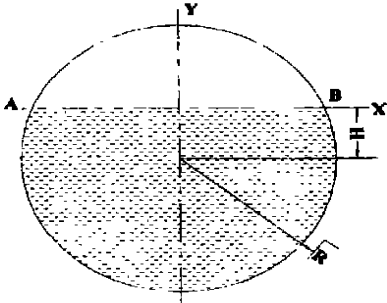


图 1 圆柱形容器内液体横向晃动问题示意图

3. 1 液面晃动形态

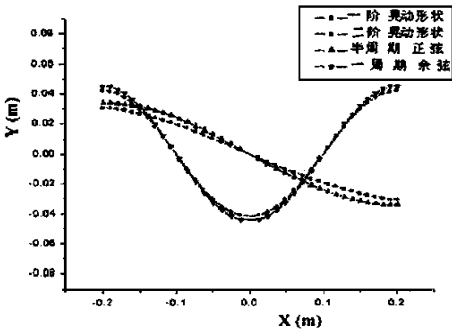


图 2 液面晃动形态为正弦或余弦曲线

计算结果表明, 液体在自然晃动状态下, 其晃动形式为正弦或余弦曲线, 如图 1 所示。图中横坐标表示容器截面的横向距离, 纵坐标表示晃动过程中液面的最大振幅。由图可知, 第一阶晃动液面形状为二分之一个周期的正弦曲线, 第二阶晃动液面为一个周期的余弦曲线, 依此类推, 液体晃动的频率越高, 其液面的周期数越多。这与矩形容器内液体的晃动形态是一致的^[7]。

3. 2 自然晃动频率与容器半径 R 的关系

为了揭示谐振频率与容器内半径的关系,首先选择 $R = 0.1\text{m}$,盛有一半液体,即 $h = 0$ 的情况进行计算,得出了前几阶自然晃动的频率,然后改变容器半径 R ,重复上面的计算,得出的结果如下表:

表 卧式圆柱形容器不同半径的各阶自然晃动频率($h = 0$)

$R(\text{m})$	f_1	f_2	f_3
0.01	1.1625	2.6933	3.2180
0.02	0.58122	1.3464	1.6086
0.04	0.29049	0.67320	0.80431
0.06	0.19373	0.44904	0.53640
0.08	0.14527	0.33673	0.40229
0.1	0.11627	0.26939	0.32191
0.2	0.058129	0.13467	0.16091
0.3	0.038748	0.089784	0.10727
0.4	0.02906	0.067337	0.080456
0.5	0.023254	0.053891	0.06438

图 3 是根据表 数据画出的 $f - R$ 关系曲线,为了比较,图中还画出了反比函数 $y = \frac{0.05}{x}$ 的曲线。可以看出,各阶自然晃动的频率与容器半径 R 成反比关系。

3.3 自然晃动频率与液体深度 h 的关系

计算结果表明,容器内液体的充满程度即液面的高度 h (参见

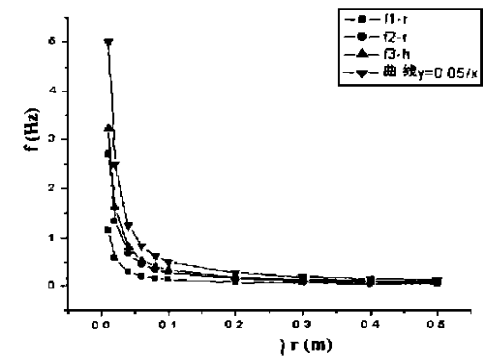


图 3 各阶频率和容器半径的关系曲线

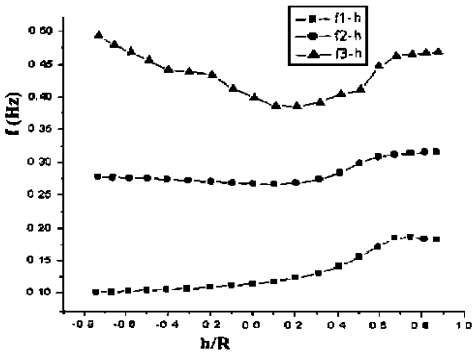


图 4 各阶晃动频率和液体深度的关系曲线

图 1),对液体晃动的谐振频率也有很大的影响,图 4表示出半径 $R = 0.2\text{m}$ 的容器其内部液体自然晃动的频率,随着液面高度变化而发生变化的趋势。图中,横坐标表示深度 h 与容器半径 R 的比值,纵坐标表示各阶频率值。可以看出,液体深度对晃动频率的影响很明显。总体上说,当容器内的液体多于容器的一半容积,即 $h > 0$ 时,随着液面深度 h 的增加,液面晃动的各阶频率呈逐渐增大的趋势;当 $h < 0$ 时,各阶频率值则随液面深度的增加而减少。我们计算了液体晃动的多阶模态,都存在着这一趋势,为了绘图的方便,图 4 只给出了前三阶晃动模态的曲线。容器内的液体在容器直径的一半深度时,其自然晃动的频率取最小值。这是由于高度 h 的变化引起了液面长度 AB 的变化,而 AB 在 $h = 0$ 时取最大值的缘故。同时随着液面深度的不断变化,容器壁面与液面之间的角度也不断变化,而这一角度也影响着液体的自然晃动频率。

4 结论

1、与矩形容器内液体晃动的液面形态相似, 圆柱形容器内液体横向晃动的液面形态, 为正弦或余弦曲线。

2、卧式圆柱形容器内液体横向晃动的频率, 与容器横截面的内径成反比。

3、液体深度对液体自然晃动频率影响显著, 在容器盛有一半液体时, 各阶自然晃动频率取最小值。这是由于液体深度发生变化时, 液体自由面的长度随之变化而引起的。同时, 液面和容器壁面之间的夹角也影响着各阶频率值。

参 考 文 献

- [1] Hayama Shinji, Aruga Keiji, Watanabe Tatsuo. Nonlinear Responses of Sloshing in Rectangular Tanks. Bulletin of the JSME, 1983, 26(219)
- [2] Faltinsen Odd M. A Nonlinear Theory of Sloshing in Rectangular Tanks. Journal of Ship Research, 1974, 18(4): 224– 241
- [3] Abramson H Norman, Chu Wenhwa, Garza Luid R. Liquid Sloshing in Spherical Tanks, AIAA Journal, 1963, 1(2): 384– 389
- [4] Dodge Fanklin T, Kana Daniel D, Abramson H Norman. Liquid Surface Oscillations in Longitudinally Excited Rigid Cylindrical Containers. AIAA Journal, 1965, 3(4): 685– 695
- [5] Luk Chihhung. Finite Element Analysis for Liquid Solshing Problems. AFOSR Scientific Report AFOSR 69– 1504 TR, 1969
- [6] 耿利寅, 李青. 容器内液体晃动的变分有限元方法. 第五届全国低温工程大会论文, 2001
- [7] 梅强中. 水波动力学. 北京: 科学出版社, 1984, 13~ 15

FEM Solution of Lateral Sloshing in Horizontal Cylindrical Cryogenic Container

Geng Liyin, Li Qing

(The Technical Institute of Chemistry and Physics, Chinese Academy of Science,
Beijing, 100080)

Abstract: Natural frequencies of lateral sloshing in a horizontal cylindrical cryogenic container with various liquid depth were calculated by FEM. the results of the calculation were summarized and some rules of sloshing in cylindrical container were acquired.

Keywords: FEM, Cryogenic container, Liquid Sloshing

作者简介: 耿利寅, 男, 1974 年生。现就读于中国科学院理化技术研究所低温技术实验中心, 攻读硕士学位。主要从事低温容器动态特性的研究工作。